Bất đẳng thức trong tam giác

I.Các bất đẳng thức về đường phân giác.

1. $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

2. $2\left(l_a+l_b+l_c\right)\le\sqrt{3}\left(a+b+c\right)$

II.Các bất đẳng thức về đường trung tuyến.

1. $m_al_a+m_bl_b+m_cl_c\ge p^2$

2. ${m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2\ge 3\sqrt{3}S+\left(m_a-m_b\right)^2+\left(m_b-m_c\right)^2+\left(m_c-m_a\right)^2$

3. $\frac{1}{\left(m_b+m_c-m_a\right)^2}+\frac{1}{\left(m_a+m_c-m_b\right)^2}+\frac{1}{\left(m_b+m_a-m_c\right)^2}\ge\frac{4}{3R^2}$

4.Chứng minh trong tam giác nhọn, ta có:

$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le\frac{R}{r}+1$

5. $\frac{1}{a^2m_a}+\frac{1}{b^2m_b}+\frac{1}{c^2m_c}>\frac{3}{abc}$

6. $ab+bc+ca>\frac{4}{5}\left(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a\right)$

7.Cho tam giác ABC vuông tại C. Chứng minh rằng:

$$\frac{r^2}{{m_a}^2+{m_b}^2}\le\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$$

8.Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. Gọi AA’, BB’, CC’ là ba đường trung tuyến. AA’, BB’, CC’ lần lượt cắt đường tròn tại ngoại tiếp tam giác tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}\le\frac{9}{4}$$

9.Có tồn tại hay không một tam giác không cân thoả mãn điều kiện:

$a + m_a = b + m_b$

III.Các bất đẳng thức về đường cao.

1.Cho ABC là tam giác không có góc tù. Ba đường cao AA’, BB’, CC’ cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

$$\left(AH+BH+CH\right)^2\le a^2+b^2+c^2$$

2.Cho tam giác ABC thoả mãn: $\widehat{A}\ge\widehat{B}\ge\widehat{C}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\ge\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}$$

IV.Các bất đẳng thức về bán kính.

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{3}{2Rr}}$

2. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$

3. $\frac{abc}{r}\ge\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}$

4.Ba cạnh a, b, c của một tam giác thoả mãn điều kiện: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{3}$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9R^2}$

V.Các bất đẳng thức về diện tích và chu vi.

1.Ba đường tròn tiếp xúc ngoài đôi một tại A, B, C có chu vi là C_1, C_2, C_3. Gọi C là chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sqrt{3}C \leq \sqrt[3]{C_1C_2C_3}$

2. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc với ba cạnh của tam giác tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng: $S_{MNP} \leq \frac{S}{4}$

3.Cho tam giác ABC. Ba đường phân giác AM, BN, CP. Chứng minh rằng: $S_{MNP} \leq \frac{S}{4}$

4.Cho tam giác ABC, O là điểm tuỳ ý trong tam giác. Hạ OM, ON, OP vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} > \frac{2p}{r}$$

5. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right)$

6. $S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

7. $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

8. $\frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 \geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \geq \frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2$

VI.Các bất đẳng thức khác về cạnh.

1. $\left(3 - \frac{b+c}{a}\right)\left(3 - \frac{a+c}{b}\right)\left(3 - \frac{a+b}{c}\right) \leq 1$

2. $\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$

3. $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

4. $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

5. $\frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{a+c-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

6. $\frac{a}{2b+2c-a} + \frac{b}{2c+2a-b} + \frac{c}{2a+2b-c} \geq 1$

7.Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. O là một điểm tuỳ ý trong tam giác. AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện tại P, Q, R. Chứng minh rằng:
OP + OQ + OR < BC